ハミルトン力学系の最近の発展について(ハミルトン力学系,ハミルトン力学系とカオス,研究会報告)

伊藤, 秀一

ハミルトン力学系の最近の発展について

東工大・理　　伊藤 秀一

§1. はじめに　ハミルトン力学系の研究とは，ハミルトン系（正準方程式）の定める微分方程式の解の挙動あるいはその離散化を取り扱うわけであるが，その基本的な特徴は

- ハミルトン系の解に沿った流れ（ flow ）は体積を保存する（ Liouville の定理）．さらにそれは正準変換であり変分原理が成り立つ．

という事実にある．この意味で，正準変換や変分原理についての理解を深めることは，ハミルトン力学系に関係する数学としての最も基本的な問題である．この点から眺めると，変分法の研究の進歩とも相まって，とくに1970年代後半から変分法を用いたハミルトン系の研究（周期解やホモクリニック軌道の存在など）が盛んになり，その流れは今も続いているをまず述べなければならないだろう．さらに，ポアンカレが制限3体問題の研究を通じて開始した不動点定理（ポアンカレーバーコフの不動点定理）の研究は，アーノルドによる正準変換に対する一般的な不動点定理の定式化（予想）と，その解決に向けてのさまざまな研究を生み，現在ではシンプレクティック幾何（あるいはトポロジー）と呼ばれる分野として大きな注目を集めている([HZ]，[MS])．そこでは変分法が（無限次元）モース理論という形をとってその進展に関っている．

ところで，ポアンカレは制限3体問題の研究に端を発して可積分系の摂動問題を考察し，一般に摂動パラメータに解析的に依存するような可積分系の族は存在しないことを示し，さらに今日のカオス研究につながるホモクリニック軌道とそれに付随する複雑なダイナミクスを発見した．ポアンカレは可積分系の摂動問題を『力学系の基本問題』と呼んだが，1950年代から60年代はじめにかけて現れたKAM(Kolmogorov–Arnol'd–Moser) 理論は，可積分系の摂動が十分小さいならば，準周期解をのせた不変トーラスが一般に生き残ることを示したものであり，その後のハミルトン力学系の研究に多大な影響を与えている．このような摂動問題は上に述べた大域的問題に比べて局所的な問題といえるが，力学系の視点から見ると，よりくわしい解の挙動を調べることのできる系であり，現在でもハミルトン力学系の中心的な問題であり続けている．なお「可積分系」という用語は，いわば「解ける（求積できる）系」という意味でしばしば漠然と用いられるが，ハミルトン系では確定した定義がある．すなわち，自由度nのハミルトン系が可積分（ [完全] 積分可能）であるとは，ポアソン括弧式に関して可換なn個の独立な第一積分（運動の保存量）が存在するときを指す．この定義は明らかに相空間の「正準（シンプレクティック）構造」に結びついている．この意味でも上に述べたシンプレクティック幾何との関

連がある[1]．そしてこのとき，それら n 個の第一積分を定数とおいた式で定義されるレベル多様体がコンパクト（有界閉集合）ならばその連結成分は n 次元トーラス $T^n = \boldsymbol{R}^n/2\pi\boldsymbol{Z}^n$ であり，その近傍で作用–角変数と呼ばれる座標を導入できて，それが摂動論の出発点になるである．

本稿では，以下の §2 で最初に述べた変分法を用いたハミルトン系の大域的な問題に関する研究を，§3 で KAM 理論に関連する最近の話題について述べたい．ただし筆者の力不足と紙数の制限から，それらのごく入口に触れる程度の説明しかできない．参考文献を参照していただければ幸いである．また，ハミルトン力学系に対する数学サイドからの入門書としてはアーノルドの教科書 [A3] や [N] あるいは拙著 [I2] を，さらに進んだテキストとしては [A4]，[Ko] を参照してしていただきたい．

§2. 変分法に関連する話題から　以下 $I = [t_0, t_1] \subset \boldsymbol{R}$ とし，簡単のため相空間を $\boldsymbol{R}^{2n}$，その座標を $z = (q,p) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ とする．$\boldsymbol{R}^{2n}$ 上の C^∞ 級のハミルトニアン $H(q,p)$ に対して，自由度 n のハミルトン系を

$$\dot{z} = J\nabla H(z), \qquad z = {}^t(q,p), \quad J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$$

と書き，このベクトル場を X_H と書く．ここで $\nabla H(z)$ は点 z における H の勾配ベクトル，O，I はそれぞれ n 次の零行列，単位行列である．この解 $z_*(t)$ を拡大相空間（(q,p,t)-空間）$\boldsymbol{R}^{2n+1}$ で考えて，$\gamma_*: I \ni t \mapsto (z_*(t), t) \in \boldsymbol{R}^{2n+1}$ とすると，これは変分原理

$$\delta F(\gamma)|_{\gamma=\gamma_*} = 0, \qquad F(\gamma) := \int_\gamma \sum_{k=1}^{n} p_k dq_k - H dt, \quad \gamma: I \ni t \mapsto (z(t), t) \in \boldsymbol{R}^{2n+1} \qquad (1)$$

を満たす．ここで端点 $z(t_0), z(t_1)$ は，(q,p) 座標のすべてを固定しても，配位空間の座標 q だけを固定してもよいが，周期軌道の存在を問題にするときは，$z(t_0) = z(t_1)$ という境界条件を端点条件のように考える．つまりループ空間上で変分問題を考えるのであり，この変分問題のオイラー–ラグランジュ方程式はハミルトンの正準方程式 (1) になるのである[2]．数学的には，このような変分問題は適当な関数空間を設定し（拡張された意味での微分が 2 乗可積分な空間 $L^2(I)$ に含まれるような空間を用いることが多い），その上で汎関数 $F(\gamma)$ の停留点（臨界点）の存在を示し，正則性（regularity）を用いて実際にそれが通常の意味で微分できることを示すのが最も普通の手法である．

ここでは，そのような研究のなかで『コンパクトな正則エネルギー曲面 $H^{-1}(c) := \{H(q,p) = c\,(\text{定数})\}$ 上には周期軌道が存在するか？』という問題について考えてみよう．ここで，正則と

[1] KdV 方程式に始まる求積できる偏微分方程式の研究は、昨今の可積分系の研究の大きな部分を占めているといえるが，それらをここで述べたような第一積分の存在によって捉えることはまだ成功していないようである．ただし KAM 理論に相当する摂動論は盛んに研究されている [Ku]．

[2] ハミルトニアンはラグランジアンからルジャンドル変換によって得られると限らなくてもよい．相空間上の曲線の空間で変分問題を考えるのである．

はその曲面上で勾配ベクトル ∇Hが消えないことを意味する．じつはこのように問題を設定すると，ハミルトン系の解はベクトル場 X_Hで決まるというよりも，エネルギー曲面によって決まることがわかる．すなわち，もし Hと異なる C^∞級関数 Fに対して $H^{-1}(c) = F^{-1}(c')$（$= S$とおく．c'は定数）となるならば，この曲面 S 上の X_Hの解と X_Fの解はそのパラメータ表示は異なっても，軌道としては一致してしまう．実際，点 $z \in H^{-1}(c)$ における勾配ベクトル $\nabla H(z)$ は曲面 Sに直交するベクトルであるから，$H^{-1}(c) = F^{-1}(c')$ より $\nabla H(z)$ と $\nabla F(z)$ は平行である．よって $J\nabla(z)$ と $J\nabla F(z)$ も平行になり，今述べた主張が言えるのである．たとえば，調和振動子のハミルトニアン $H = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(q_k^2 + p_k^2)$ の解はすべて周期 2πの周期解であり，そのエネルギー曲面は $2n-1$ 次元球面であるが，今述べたことから $2n-1$ 次元球面上のハミルトン系の軌道は必ず同一の周期をもつ周期解になることがわかる．このような観点から，上に述べたようなコンパクトエネルギー曲面上に周期解が存在するかどうかが基本的な問題になるのである．

この問題については，最初は曲面 Sが凸な場合や，ハミルトニアンが $H = T + U$（運動エネルギー＋ポテンシャル）の場合について肯定的に解決され，とくに Sが適当な 2 つの楕円面によって囲まれる（ pinch される）ときは n 個の周期解の存在が示された．たとえば線形な格子振動で固有振動数が有理的に独立ならば，同一のエネルギーをもつ周期解は固有振動に対応する n 個しか存在しないから，その場合はベストの個数になっているわけである．もちろん線形系はきわめて特殊であり，一般の非線形ハミルトニアンでは同一エネルギー曲面上に無限個の周期軌道が存在し得るであろう．実際，もし楕円型の周期軌道が存在すれば，Birkhoff–Lewis の不動点定理 ([I1] 参照) によって，一般にそこに集積する周期軌道の列が存在する（周期は ∞ に発散する）．ただし必ずそうなるわけではなく，エネルギー曲面が正則でコンパクトであっても，その上に周期軌道が存在しないような例が最近 M. Herman と V. Ginzburg [Gin] によって作られた．なお（ルベーグ測度の意味で）ほとんどすべてのエネルギー値 c に対して，コンパクトな曲面 $H^{-1}(c)$ は周期軌道をもつことが証明されている ([HZ] 参照)．

以上で述べたのは周期軌道の存在だけであるが，ハミルトン系の解がエネルギー曲面によって決まるという上に述べた事実は，より複雑な（カオス的な）軌道についても成り立つ．そのような観点からは，周期解の安定性と不安定性が興味深い重要な問題であろうが（たとえば，エネルギー曲面のトポロジー的あるいは微分幾何的な量と安定性の関係など），まだ十分な研究がなされていないのが現状である（これについては [Ek1,Ek2] や [DA] を参照）．その意味では，§1 の最初に述べた「ハミルトン系の解は変分原理を満たす」という側面はまだよく理解されているとはいえないであろう．しかし，ここ 10 数年の間の変分法を用いた研究の進展は顕著なものであり，最近では，変分法によってホモクリニック軌道の存在やさらにはカオス的な挙動の存在を証明する研究が行われている ([B], [CzES], [AB] 参照)．またニュートンポテンシャルのように，エネルギー曲面が非有界な場合の周期解やホモクリニック軌道の存在に関しても，

田中和永氏の研究をはじめとする多くの研究がある ([ACz] 参照).

§1 のはじめに述べた，正準変換のもつ特性についてすこし触れておこう．$\boldsymbol{R}^{2n}$上の写像φが正準変換とは，φの各点zにおけるヤコビ行列（線形部分）$P := D\varphi(z)$ がシンプレクティック行列，すなわち${}^tPJP = J$を満たすことを意味する．これはとくに体積保存性（$\det P = 1$ からわかる）を意味し，$n = 1$ つまり平面のときは，面積と向きを保つことが正準変換ということである．しかし$n \geq 2$ のときに，正準変換であることと体積保存性にはどれほどの差があるかは 1980 年代半ばの M. Gromov の研究に至るまで全くわかっていなかった．Gromov は 半径rの球$B(r) = \{z \in \boldsymbol{R}^{2n} \mid z_1^2 + \cdots + z_{2n}^2 < r^2\}$ を円柱 $Z(R) = \{z = (q,p) \in \boldsymbol{R}^{2n} \mid q_1^2 + p_1^2 < R^2\}$ に正準変換によって埋め込めるためには，$R \geq r$でなければならないことを証明したのである（squeezing theorem と呼ばれる．[MS], [HZ] 参照）．このような結果がわかったのがごく最近であることからも，（4 次元以上の）正準変換の難しさがわかるであろう．この際に用いられた手法は J–正則曲線（pusdo-holomorphic curve）と呼ばれるものであるが，その後シンプレクティック容量と呼ばれるシンプレクティックな不変量の研究を生み，ハミルトン系の周期解の存在問題に帰着させる別の証明も与えられている [HZ].

ハミルトン系の解が無限次元空間上の汎関数の停留点であること（変分原理）に対応して，正準変換に対する不動点あるいは周期点を関数の停留点として捉えるアイデアはポアンカレ–バーコフの定理の証明に見られるが ([A3, Appendix 9] および [I2] 参照)，これを一般的にしたのがアーノルド予想であり，その（部分的な）解決については [MS]，[FO] を参照されたい．

なお，正準変換はある意味でハミルトン系の流れの離散化にあたるから，ハミルトン系の周期解やホモクリニック軌道を変分法によって導けることに対応して，正準変換のつくる離散力学系の軌道を（離散化された）変分法によって得ることもできる ([MS, Chap 3])．それは monotone twist map と呼ばれる平面上の写像の場合に Aubry–Mather 理論として成功している (応用も含めて [Ge], [MF], [MM]，[Mo4] 参照)．とくに KAM トーラス（円周）が崩壊しても cantorus（不変集合がカントール集合となるのでこの名がある）として，数学的には弱解として捉えることができることを示したことに大きな意義がある．また多次元への拡張については，[MF] や [Ma1, 2] を参照されたい．

§3. KAM 理論の進展　可積分ハミルトン系の摂動とは，相空間を直積空間 $T^n \times D$（Dは$\boldsymbol{R}^n$の領域）と捉えて，その座標を (θ, I) とするとき

$$H(\theta, I, \epsilon) = H_0(I) + H_1(\theta, I, \epsilon), \qquad H_1(\theta, I, 0) = 0 \tag{2}$$

の形のハミルトニアンを考えることである．これは§1 の最後に述べたように，可積分系がコンパクトなレベル多様体をもつならば，つねに可能な設定であり，$I \in \boldsymbol{R}^n$は作用変数，$\theta \in T^n$は角変数と呼ばれる．$\epsilon = 0$ では，ハミルトンベクトル場 X_Hは$\dot{\theta} = \partial H_0/\partial I$，$\dot{I} = -\partial H_0/\partial \theta = 0$

であるから，その解 $(\theta(t), I(t))$ は

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta(0) \quad \left(\omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial I}(I_0)\right), \qquad I(t) = I_0 (= I(0))$$

となり，これは n 次元トーラス $\{I = I_0\}$ 上の周期軌道（閉軌道）あるいはその上を稠密に埋める準周期軌道になる．この n 次元トーラスをベクトル場 X_{H_0} の不変トーラスといい，$\omega_0 = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ をその周波数と呼ぶ．KAM 理論は，非退化条件 $\det \partial^2 H_0/\partial I^2(I_0) \neq 0$ のもとで，可積分系 X_{H_0} に対する不変トーラス $\{I = I_0\}$ の近傍の不変トーラスのうち，その周波数ωが，適当な正数 c とνに対してディオファントス条件

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq c|k|^{-\nu} \quad (k = (k_1, \ldots, k_n) \in \boldsymbol{Z}^n \setminus \{0\}) \tag{3}$$

を満たすものについては，ϵが十分 0 に近い限り，摂動系 X_H に対しても変形されて生き残ることを保証するものである．ただし $\langle k, \omega \rangle = \sum_{j=1}^n k_j \omega_j$，$|k| = \sum_{j=1}^n |k_j|$ である．条件 (3) は $\omega_1, \ldots, \omega_n$が有理的に独立であることを意味するから，解は不変トーラス上を稠密に埋める準周期解である．

KAM 定理の証明は，摂動論に現れる小分母 (small divisors) と呼ばれる困難を，Kolmogorov の示唆によるニュートン法による「早い収束」をもった近似法によって解決したものであり，Kolmogorov [K] と Arnol'd [A1,A2] は解析的なハミルトニアンを問題にし，Moser [Mo1] は有限回微分可能な twist 写像を考察した．ただし解析的な場合を扱った Kolmogorov と Arnol'd の証明の間にも，手法の差がある．Kolmogorov のアイデアは周波数を固定して対応する不変トーラスを座標変換によって探すものであり（この方法は有限回微分可能なハミルトニアンの場合へも一般化される [SZ]），一方 Arnol'd の方法は周波数は固定せずに座標変換を繰り返し，不変トーラスの全体を極限で得ようとするものである．以下では，対象を実解析的なハミルトニアンに限って，KAM 理論をめぐる最近の進展および Nekhoroshev 理論との関連について触れたい．

まず，以上で述べたのは自由度 n に対する最大次元 (n) の不変トーラスの存在であるが，1980 年代半ば以降，それよりも低い次元の不変トーラスの存在が得られるようになった．すなわち，

$$\begin{cases} H(\theta, I, x, y, \epsilon) = H_0(I) + h_0(\tau) + H_1(\theta, I, x, y, \epsilon), \\ \theta \in \boldsymbol{T}^m, \ \ I \in \boldsymbol{R}^m, \ \ x, y \in \boldsymbol{R}^l, \ \ \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l), \ \ \tau_j = \dfrac{1}{2}(x_j^2 + y_j^2), \quad m + l = n \end{cases}$$

の形のハミルトニアンに対して，m 次元不変トーラスの存在を問題にするのである（$h_0(\tau)$ はバーコフ標準形である）．このとき現れる小分母には $h_0(\tau)$ の項からの寄与があるため，その扱いは複雑になるが，H. Eliasson がそれを解決し，さらにそれは C. E. Wayne や J. Pöshel，S. Kuksin によって可積分な偏微分方程式の摂動問題の取り扱いへと発展した．現在では，そ

のような偏微分方程式に対する準周期解をのせた有限次元あるいは無限次元の不変トーラスの存在が議論されている ([Ku] や [KuP] およびその中の文献を参照).

次に，オリジナルな KAM 理論ではニュートン法に基づく逐次近似法によって不変トーラスの存在が示されたが，これにより，不変トーラス上の (2) の準周期解は摂動パラメータϵの収束べき級数として

$$\theta(t) = \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega t)\epsilon^k, \quad I(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(\omega t)\epsilon^k, \qquad \omega t = (\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)$$

と表されることがわかる ([Mo2], [Mo3]). ここで X_k，Y_kはT^n上の実解析関数，すなわち$\boldsymbol{R}^n$上の解析的な周期 2πの多重フーリエ級数である．この級数を Lindstedt 級数と呼ぶが，最近，H. Eliasson [El] が C.L. Siegel による正則関数の不動点のまわりでの線形化問題での小分母の取り扱い [S] （ニュートン法によらないで級数の係数を直接に評価する）を KAM の状況に拡張したことをきっかけに，G. Gallavotti や L. Chierchia , E. Falcolini , G. Gentile らは，Eliasson の方法を発展させ，さらに場の理論における繰り込みの方法を用いることによって，Lindstedt 級数をまず形式級数として定義し，その収束性を直接証明することで KAM 定理を証明している ([CF1], [CF2] および [GeM] とその参考文献を参照．また，ϵのベキ級数とは捉えず，正準変換によって準周期解を構成する（元来 Kolmogorov による）アイデアをニュートン法を用いずに実行した論文 [GiL] も参照.）この手法によって KAM 理論における非退化条件（ $\det \partial^2 H_0/\partial I^2 \neq 0$ ）が成り立たない場合に KAM 定理を拡張したり ([Ga], [GeM] 参照), KAM トーラスとカオスの発生の崩壊に関してもパラメータϵの増大に伴うより精密な情報が得られる可能性がある.

最後に Nekhoroshev 理論 [Nek] と KAM 理論の関連について触れておこう．Nekhoroshev 理論は，上で考えた摂動系 X_Hのハミルトニアン $H = H_0(I) + H_1(\theta, I, \epsilon)$ が 凸性を一般化した steepness 条件と呼ばれる条件（定義は省略）を満たすならば，任意の解が評価式

$$|I(t) - I(0)| \leq R_* \epsilon^b \qquad (\,|t| \leq T_* \exp(\epsilon^{-a})\,)$$

を満たすことを主張するものである（ a, b, R_*, T_*は正の定数）. ここで，定数 $a, b > 0$ をできるだけ大きく取ることができれば，それだけ解に対するより長い時間の安定性が得られることになり，それによって断熱不変性（ adiabatic invariant ）の厳密な取り扱いが可能になる．この問題についても 1980 年代半ばから，a, b の精度をあげる努力が行われた（現在では a, b ともに $1/2n$ にとれることが示されている [P2] , [L] , [LN] ）．この評価はあくまで有限時間の間のものであるが，最近 Giorgilli と Morbidelli [GiM] は，Arnol'd による KAM 定理の逐次近似による証明を変形し，すなわち，逐次近似の各ステップにおいて誤差項が前のステップの誤差項の 2 乗で評価されるという "quadratic estimate" を Nekhoroshev の定理（この逐次近似に

適するように証明し直す）の評価に置き換えることによって，KAM トーラスに中心をもつ領域（ nested domains ）の列 D_ν （$\nu = 1, 2, \ldots$ ）で次の条件 (i)，(ii) を満たすものが存在することを証明した：

(i) $t = 0$ で D_ν を発した解が D_ν に留まる時間は Nekhoroshev の評価をもち，$\nu \to \infty$ のとき指数的に∞に発散する．

(ii) D_ν の極限は KAM トーラスの集合である．

これは，ある意味で Nekhoroshev の定理が KAM 定理を含んでいることを意味している ([DG] も参照)．

KAM 理論および Nekhoroshev 理論に関係する部分は，証明は構成的な手法が基本になっていて，そのためには微妙な評価を行う必要がある．しかし，その『級数の収束と発散』という技術的な問題は KAM トーラスの存在と崩壊に密接に関係している．実際，通常のニュートン法に基づく逐次近似法でもその途中の評価を改良すると，KAM トーラスの崩壊が起こるパラメータ値のある程度の評価をすることもでき，応用上重要である．これについては [CC1,CC2] を参照されたい．また，KAM 理論と関連する分野全般について，[BHS] には多くの参考文献があげられているので，参照されたい．

参考文献

[A1] V.I. Arnol'd : Small divisor problems in classical and celestial mechanics, Russian Math. Surveys **18**(6) (1963), 85–191.

[A2] V.I. Arnol'd : A proof of A.N. Kolmogorov's theorem on conservation of conditionally periodic motions under small perterbations of the hamiltonian, Russian Math. Surveys **18**(5) (1963), 9–36.

[A3] V.I. Arnol'd : *Mathematical Methods of Classical Mechanics,* Graduate Texts in Mathematics **60**, Springer, 1989.

[A4] V.I. Arnol'd, V.V.Kozlov, A. Neishtadt : *Dynamical Systems* III. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, 1988.

[AB] A. Ambrosetti and M. Badiale : Homoclinics : Poincaré-Melnikov type results via a variational approach, C.R. Acd. Sci. Paris **323**, Ser I (1996), 753–758.

[ACz] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati : *Periodic Solutions of Singular Lagrangian Systems,* Birkhäuser, 1993.

[B] S.V. Bolotin : Homoclinic orbits to invariant tori for Hamiltonian systems, Amer. Math. Soc., Transl. **168** (1995), 21–90.

[BHS] H.W.Broer, G.B.Huitema, M.B.Sevryuk : Quasi-Periodic Motions in families of Dynamical Systems, Lecture Notes in Math. Vol. 1645, 1996.

[CC1] A. Celletti and L. Chierchia : Construction of analytic KAM surfaces and effective stability bounds, Commun. Math. Phys. **118** (1988), 119–161.

[CC1] A. Celletti and L. Chierchia : Rigorous estimates for a computer-assisted KAM theory, J. Math. Phys. **28** (1987), 2078– .

[CF1] L. Chierchia, C. Falcolini : A direct proof of a theorem by Kolmogorov in hamiltonian systems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Ser. IV **21**(4) (1995), 541–593.

[CF2] L. Chierchia, C. Falcolini : Compensations in small divisors problems, Commun. Math. Phys. **175** (1996), 135–160.

[CzES] V. Coti Zelati, I. Ekeland and E. Séré : A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems, Math. Ann. **288** (1990), 133–160.

[DA] G.F. Dell'Antonio, Variational calculus and stability of periodic solutions of a class of Hamiltonians systems, Reviews in Math. Phys, **6** (1994), 1187–1232.

[DG] A. Delshams and P. Gutiérrez : Effective stability and KAM theory, J. Differential Equations, 128 (1996), 415–490.

[Ek1] I. Ekeland : An index theory for periodic solutions of convex Hamiltonian systems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **45** (1986), Part 1, 395–423, Amer. Math. Soc.

[Ek2] I. Ekeland : *Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer, 1990.

[El] L.H. Eliasson : Generalization of an estimate of small divisors by Siegel, *Analysis et cetera*, ed. E. Zehnder and P. Rabinowitz, book in honor of J. Moser, Academic Press, 1990.

[FO] K. Fukaya and K. Ono : Arnold conjecture and Gromov - Witten invariant for general symplectic manifolds (announcement), Arnold conjecture and Gromov - Witten invariant, preprint (1996).

[Ga] G. Gallavotti : Twistless KAM tori, quasi flat homoclinic intersections, and other cancellations in the perturbation series of certain completely integrable Hamiltonian systems. A review, Reviews in Math. Phys. **6**(3) (1994), 343–411.

[Ge] C. Genecand : Transversal homoclinic orbits near elliptic fixed points of area preserving diffeomorphisms of the plane, In : *Dymamics Reported* (New series) vol. 2, Springer 1993, 1–30.

[GeM] G. Gentile, V. Mastropietro ; Methods for the analysis of the Lindstedt series for KAM tori and renormalizability in classical mechanics, A review with some applications, Reviews in Math. Phys,, **8**(3) (1996), 393–444.

[GiL] A. Giorgilli and U. Locatelli : Kolmogorov theorem and classical perturbation theory, ZAMP **48** (1997), 220–261.

[GiM] A. Giorgilli and A. Morbidelli : Invariant KAM tori and global stability for Hamiltonian systems, ZAMP **48** (1997), 102–134.

[Gin] V.L. Ginzburg : An embedding $S^{2n-1} \to \boldsymbol{R}^{2n}$, $2n-1 \geq 7$, whose Hamiltonian flow has no periodic trajectories, IMRN (1995), 83–96.

[HZ] H. Hofer, E. Zehnder: *Symplectic Invariants and hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser, 1994.

[I1] 伊藤秀一：ハミルトン力学系の周期解，数理科学 1995 年 6 月号，60–65.

[I2] 伊藤秀一：常微分方程式と解析力学, 共立出版, 1998.

[K] A.N. Kolmogorov : On the preservation of conditionally periodic motions under small variations of the Hamilton function, In : Selected Works of A.N. Kolmogorov, vol 1, 349–354., Kluwer 1991. (Dokl. Akad. Nauk SSSR **98** (1954), 527–530.)

[KS] 木村利栄・菅野礼司：微分形式による解析力学（改訂増補版），吉岡書店，1996 .

[Ko] V.V. Kozlov : *Symmetries, Topology, and Resonances in Hamiltonian Mechanics*, Springer, 1995.

[Ku] S.B. Kuksin : *Nearly Integrable Infinite-Dimensional Hamiltonian Systems*, Lecture Notes in Math. Vol. 1556, 1993.

[KuP] S.B. Kuksin and J. Pöschel : Invariant Cantor manifolds of quasiperiodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation, Ann. Math. **142** (1995), 149–179.

[L] P. Lochak : Canonical perturbation theory via simultaneous approximations, Russian Math. Surveys, **47** (1992), 57–133.

[LN] P. Lochak and A.I. Neishtadt : Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hmailtonian, Chaos **2**(4) (1992), 495–499.

[Ma1] R. Mañé : On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems, Nonlinearity **5**(2) (1992), 623–638.

[Ma2] R. Mañé : Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems, Nonlinearity **9**(2) (1996), 273–310.

[MF] J. Mather and G. Forni : Action minimizing orbits in Hamiltonian systems, Lec. Notes in Math. **1589**, Springer (1994), 92–186.

[MM] R. McGehee and K.R. Meyer (eds) : Twist mappings and Their Applications, IMA volumes in Math. and Appl. Vol 44 (1992).

[Mo1] J. Moser : On invariant curves of area perserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl II (1962), 1–20.

[Mo2] J. Moser : Convergent series expansions for quasi-periodic motions, Math. Ann. **169** (1967), 136–176.

[Mo3] J. Moser : *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Ann. Math. Studies **77**, Princeton Univ. Press, 1973.

[Mo4] J. Moser : Recent developments in the theory of Hamiltonian systems, SIAM Reviews **28** (1986), 459–485.

[MS] D. McDuff, D. Salamon: *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Univ. Press, 1995.

[Nek] N.N. Nekhoroshev : An exponential estimate of the time of stability of near-integrable Hamiltonian systems I, Russian Math. Surveys **32** (1977), 1–65 ; II, Tr. Semin. Petrovsk. **5** (1979), 5-50. In : O.A. Oleinik (ed.) *Topics in Modern Mathematics, Petrovskii Semin.*, no.5 New York: Consultant Bureau (1985).

[N] 丹羽敏雄：力学系，紀伊国屋書店，1980.

[Po] H. Poincaré : *Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, I, II, III (1892, 1893, 1899), Gauthier-Villars.

[P1] J. Pöshel : On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems, Math. Z. **202** (1989), 559–608.

[P2] J. Pöshel, Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems, Math. Z. **213** (1993), 187–216.

[S] C.L. Siegel : Iterations of analytic functions, Ann. Math. **43** (1942), 607–612.

[SZ] D. Salamon and E. Zehnder : KAM theory in configuration space, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 84–132.

東京工業大学理学部数学教室
〒 152–8551 東京都目黒区大岡山 2–12–1